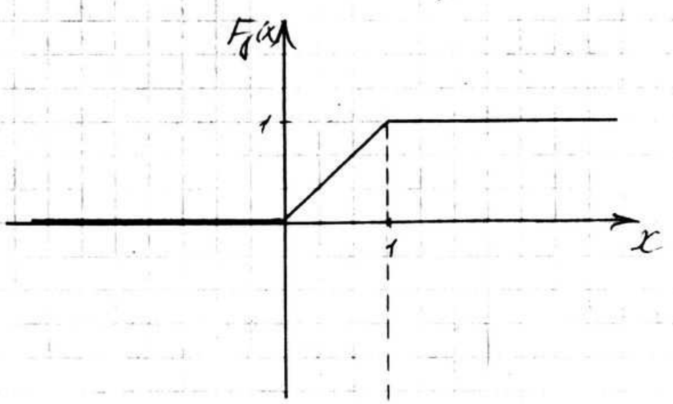
28.12.24. Лекция 2.

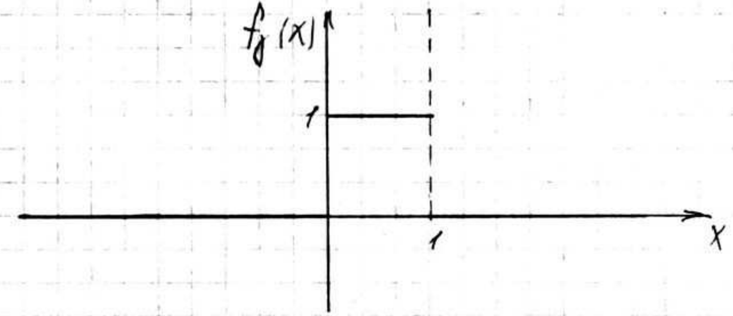
Моделирование случ величин. (продолжение).

Основой моделирования СВ явл. базовая случ. величина БСВ. Ф-ия её распр-я:

$$F_\gamma(x) = P(\gamma < x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$



$$f_\gamma(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$$



$$M(\gamma) = \int_0^1 f_\gamma(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$D(\gamma) = M[\gamma - M(\gamma)]^2 = M(\gamma^2) - (M(\gamma))^2 =$$

$$= \int_0^1 f_\gamma(x)\,x^2 dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \int_0^1 x^2 dx - \frac{1}{4} = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Вычислим вер-ть попадания γ в интервал $(a;b) \in [0;1]$:

$$P(a < \gamma < b) = \int_a^b f_\gamma(x)\,dx = b - a$$

Т.об. вер-ть попадания СВ γ в промежуток равна длине этого промежутка

другой способ:

$$P(a < \gamma < b) = F_\gamma(b) - F_\gamma(a) = b - a$$

Способы моделирования БСВ.

При модел-ии БСВ на ЭВМ надо иметь возможность получения очередного значения БСВ по требованию программы. Для этого необходимо либо поместить в память машины посл-ть значений γ, разыгранных заранее, либо организовать физический датчик случ. чисел, либо программным путем получать посл-ть случ. значений γ.

3 группы способов получ-я γ на ЭВМ:

а) <u>Табличный</u>: состоит в введении в памяти ЭВМ таблицы знач-ий БСВ, выборка кот-х произв-ся последовательно по запросу.

Таблицы составляют с помощью физических датчиков и подвергают строгой проверке.

Составление большой таблицы явл. сложной задачей и таблицы исп-ся в основном при ручных расчётах по методу Монте-Карло.

Недостатки применения на ЭВМ:
- нехватка табличных чисел;
- расходуется оперативная память;

б) <u>С использованием физ. датчиков</u>

Существенным недостатком такой сис-мы явл. невозможности повторения последовательности случ. значений.

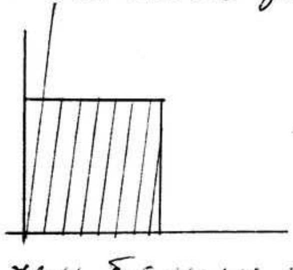
в) <u>Программная реализация</u> посл-ти псевдослуч. чисел. Псевдо- т.к. числа получены по программе, но удовлетворяют проверке на случайность.

$x_n = f(x_{n-1})$ - рекуррентное соотношение

$0<x_0<1$ - начальное значение к.

$y=\{kx\}$

$k>>1$



чем больше k тем лучше

$y=\{...\}$ - ф-ла дробной части.

$x_i=\{(\pi+x_{i-1})\}$

Наибольшее практ. применение имеет метод Лемера или метод вычетов. Опр-ся посл-ть целых чисел a_i, в кот-й нач. значение a_0 задано, а все последующие числа выбир-ся по одной и той же ф-ле:

$a_i = k a_{i-1} \,(\mathrm{mod}\, M)$ - эта запись означает, что число a_i равно остатку от деления произведения ka_{i-1} на число M.

Остатки относят к модулю M:

$x_i = \frac{a_i}{M}$

Дробь $\frac{a_i}{M}$ несократима, если несократима дробь $\frac{a_{i-1}}{M}$.

mod M - модуль M.

Пример:

$a_0 = 1$ $k = 17$ $M = 35$

$x_1 = \left\{k \frac{a_0}{M}\right\} = \left\{17 \cdot \frac{1}{35}\right\} = \frac{17}{35}$

$x_2 = \left\{17 \cdot \frac{17}{35}\right\} = \frac{9}{35}$

$x_3 = \left\{17 \cdot \frac{9}{35}\right\} = \frac{13}{35}$

$x_4 = \frac{11}{35}$

$x_5 = \frac{12}{35}$

$\vdots$

$x_{13} = \frac{17}{35} = x_1$

Т.об. в данном случае период T оказался равным 12, т.е. малым из-за неудачного выбора k и M.

В реальности k и M выбирают так, чтобы T было максимально.

$T \le M-1$

1) $M = 2^q$ $q = 31 \Rightarrow M = 2^{31}$

Тогда $T_{max} = 2^{k-2} = \frac{M}{4} \sim 10^9$

$1 \le a_0 \le M-1$

$k = 5^{2p+1}$

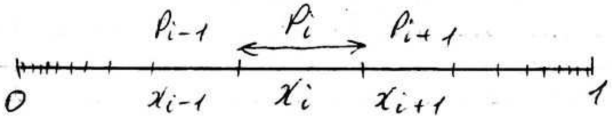
$k = 2^m + 3$

Есть еще способы, но их не писали.

Моделирование ДСВ
с заданным з-ном распр-я.

Пусть требуется смоделировать СВ
ξ : знач-е x_i $(i=\overline{1,n})$
вер-ть p_i

Разобьем отрезок $[0;1]$ на n интервалов длиной p_i



За каждым интервалом закрепим знач-е x_i.
Разыграем случ. знач-е БСВ и опре-

делим номер интервала, в кот-е это знач-е попало.

$$\gamma > P_1 + P_2 + \ldots + P_i$$

Повторяя процедуру многократно получим СВ, распр-ую по заданному з-ну.

Моделирование дискретной многомерной СВ методом Неймана.

Пусть необх. смоделировать многомерную СВ ξ с плотностью распр-я $f_\xi(X)$. $X=\{X_1,\dots,X_S\}$ - S-мерная величина.

$f_\xi(X) \ge 0$ и определена в S-мерном параллелепипеде

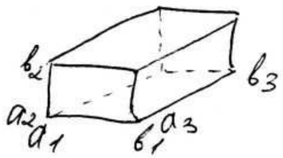
$f_\xi(X) \le M$ - выполняется во всем параллелепипеде

Модел-е выполняют в посл-ти:

сначала получают с помощью датчика БСВ начальную посл-ть случ. чисел $\gamma_1,\dots,\gamma_S \in [0;1)$ и каждое из этих значений преобразуют к соответствующему интервалу распр-я данного компонента X_i.

$i=1 \qquad x_1 = a_1 + (b_1 - a_1)\gamma_1$

a_i, b_i



$i=2$

$\vdots$

$i=S \qquad x_S = a_S + (b_S - a_S)\gamma_S$

Далее знач-я $x_1 \dots x_S$ подставляем в ф-ию $f_\xi(X_1,\dots,X_S)$ и делим все на M.

$f_\xi(X_1,\dots,X_S)/M$ должно быть $\ge \gamma_{S+1}$

Смысл проверки ↑ состоит в оценке того, нах-ся ли γ_{S+1} по нормированной кривой $f_\xi(\dots)/M$ или выше её. Если это нер-во выполнено, то знач-е γ_{S+1} нах-ся под кривой при данных знач-ях $X_1,\dots,X_S$ и эти знач-я принимают в кач-ве компонент реализации случ. многомерной величины ξ, распр-ной с плотностью $f_\xi(X)$. Если нер-во не выполняется, то все знач-я $X_1,\dots,X_S$ отбрасываются.